Zur Theorie

des

elektrischen Pendels.

Inaugural-Dissertation

mit Genehmigung

der philosophischen Facultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

verfasst

von

Paul Jenrich

aus Magdeburg.

Magdeburg.

Druck von E. Baensch jun

1874.

Parentibus Meis Carissimis

pietatis causa

D. D. D.

Zur Theorie

des

elektrischen Pendels.

Mathematisch-physikalische Abhandlung.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0169

Das elektrische Pendel — in seiner einfachsten Gestalt — besteht aus einem Hollundermark-Kügelchen, welches, an einem isolirenden Seiden- oder Leinenfaden aufgehangen, der Wirkung eines durch Reibung elektrisch gewordenen (idioelektrischen) Körpers ausgesetzt wird. Wie bekannt, dient dieses Pendel in der Physik als einfaches Elektroscop; denn sobald es aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt wird, schliessen wir auf eine Attraktiv- oder Repulsivkraft, welche der genäherte, zu prüfende Körper auf das Kügelchen ausübt, d. i. auf einen elektrischen Zustand desselben; verharrt dagegen das Kügelchen in seiner Gleichgewichtslage, so schliessen wir, dass entweder dies elektrische Fluidum des zu prüfenden Körpers so schwach ist, dass für uns weder eine sichtbare noch messbare Wirkung auf das Kügelchen erfolgen kann, oder der genäherte Körper seiner Natur nach unelektrisch ist.

Bei jeder stattfindenden Berührung des Kügelchens mit dem elektrischen Körper überträgt sich ein bestimmtes Quantum Elektricität auf dasselbe und es erfolgt nach dem Fundamentalsatze der Elektricitätslehre, dass gleichwerthige Elektricitäten sich abstossen, nothwendig eine Abstossung; das Kügelchen pendelt um seine Gleich-

gewichtslage in kleinen mehr und mehr abnehmenden Bögen, bis es entweder abgeleitet wird oder allmählich seine Elektricität an die umgebende Luftschicht abgegeben hat; alsdann nimmt es die stabile Ruhelage ein.

Allgemeiner kann man sich das Kügelchen auch von zweien oder mehreren Elektricitätsquellen (Conduktoren) beeinflusst denken, die, mögen sie eine Gestalt haben, welche sie wollen, ihre Wirkung stets proportional der Quantität der Elektricitäten und den reciproken Quadraten ihrer Entfernungen ausüben. Wir erinnern uns hierbei an die Bewegungen, die ein isolirtes Kügelchen vollführt, das gezwungen wird, zwischen zwei mit entgegengesetzten Elektricitäten geladenen Conductoren zu schwingen[1]) Bei der jedesmaligen Berührung eines Conductors verwandelt sich die Elektricität des Kügelchens in die entgegengesetzte und auf diese Weise wird eine Art periodischer Bewegung erzeugt, die lange andauern kann und die man recht eigentlich wegen ihrer Periodicität als eine elektrische Pendelbewegung bezeichnet.

Wir sprechen bis jetzt nur von Bewegungen eines elektrischen Kügelchens; die Form der Kugel ist aber nur eine von den mannigfachen Formen, unter denen uns diese und ähnliche Bewegungen erscheinen. Denken wir nur — um eines Falles Erwähnung zu thun — an die Bewegungen des Goldblattstreifens, das in dem von Behrens zuerst angegebenen und später von Bohnenberger,

---

[1]) Sind die Conduktoren durch eine Zambonische Säule verbunden, so erhält man das eigentliche elektrische perpetuum mobile.

Fechner, Becquerel und Andern neuerdings sehr verbesserten Säulenelektroscop (auch Säulenelektrometer genannt) zwischen den Polplatten einer trockenen (Zambonischen) Säule schwingt.

Auch durch Influenzelektricität werden ähnliche elektrische Pendelbewegungen hervorgerufen. Der bekannteste Fall dürfte das elektrische Glockenspiel sein, bei dem die influencirten Metallkügelchen zwischen den Glöckchen hin und her pendeln und diese zum Tönen bringen, sobald die mittelste Glocke mit dem Conduktor einer Elektrisirmaschine verbunden und hinreichend mit Elektricität geladen wird.

Wir wollen nun, um uns über derartige elektrische Pendelbewegungen eine genauere Vorstellung zu bilden, in unserer Untersuchung vom allgemeinen Falle ausgehen und mathematisch die Bewegungen eines elektrischen Massenpunktes untersuchen, d. i. eines unendlich kleinen Kügelchens, dessen Elektricität im Centrum concentrirt gedacht werden kann unter dem Einflusse zweier beliebiger Elektricitätsquellen, die wir uns der Einfachheit halber auch als Punkte vorstellen.

Wir hängen das elektrische Pendel d. i. eine an einem unbiegsamen, massenlosen Faden hängende, in einem mathematischen Punkte concentrirte Masse zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Elektricitätsquellen symmetrisch an einem mit der Erde fest verbundenen Punkte so auf, dass sich das Pendel ohne jeden Zwang und Widerstand nach allen Richtungen unendlich leicht drehen kann, ohne vorher die Elektricitätsquellen zu berühren. Im Allgemeinen wird dann das Pendel gezwungen sein,

sich auf einer Kugeloberfläche in mannigfach verschlungenen Curven zu bewegen. Hiebei sehen wir von dem Widerstande der Luft, der fortwährenden Zerstreuung der Elektricität und allen sonstigen Zufälligkeiten, die die Bewegung des Kügelchens bei jedem praktischen Versuche modificiren, ab und lassen nur die elektrischen Anziehungskräfte resp. Abstossungskräfte und die Einwirkung der Schwere gelten. Nehmen wir ferner an, dass die gegebene Anfangslage des elektrischen Pendels genau in der Ebene sich befinde, welche durch die beiden gegebenen Elektricitätsquellen (Punkte) und den Aufhängungspunkt des Pendels gelegt werden kann, und die Verlängerung des Pendelfadens genau durch den Mittelpunkt der Erde (die wir hier als ideale Kugel uns vorstellen) geht, so ist für das bewegliche Kügelchen kein Grund vorhanden aus dieser Ebene herauszutreten; das Pendel bewegt sich mithin auf einer Kreisbahn unter dem Einflusse der oben angenommenen Kräfte.

Seien $\pm m$ und $\pm n$ die gegebenen festen Elektricitätsquellen, die uns als unendlich kleine Kugeln erscheinen und wobei $+$ ein positives, $-$ ein negatives Quantum Elektricität bedeuten mag, bezeichne O den Aufhängungspunkt des Pendels, a seine Entfernung von $\pm m$ und $\pm n$, l die Länge des Fadens, $\pm m^1$ den beweglichen elektrischen Massenpunkt, φ den Ausschlagswinkel, r und r_1 die augenblicklichen Entfernungen des Massenpunktes von $\pm m$ und $\pm n$, $2d$ die constante Entfernung beider Punkte, β den constanten Winkel den a mit der Vertikalaxe bildet, g die Anziehungskraft der Schwere, M die ponderable Masse des beweglichen Punktes $\pm m^1$, θ und

θ^1 die variabeln Winkel, welche eine im Punkte $\pm m^1$ an den Kreis gelegte Tangente mit r und r^1 bildet, und werden diejenigen Kräfte, die den Winkel φ zu vergrössern streben positiv genommen, diejenigen aber, die ihn zu verkleinern streben, negativ, so ist die in der Richtung der Verbindungslinie d. i. BE resp. in entgegengesetzter Richtung abstossend wirkende Kraft.[1])

$$K_1 = \pm \frac{m \; m^1}{r^2}$$

die in der Richtung EG anziehend wirkende Kraft resp. in entgegengesetzter Richtung anziehende Kraft

$$K^1_1 = \pm \frac{n \; m^1}{r_1{}^2}$$

da der negative Massenpunkt $-n$ gleichfalls den $\angle \varphi$ zu vergrössern strebt und je nachdem n entgegengesetzte oder gleichwerthige Elektricität mit m^1 hat[2]), die in der Richtung EJ wirkende Schwerkraft

$$K^1_2 = -g.$$

Jede dieser Kräfte lässt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine in der Richtung der Tangente, die andere in der Richtung des Pendelfadens gelegen ist. Da die Letzteren durch die Spannung des Fadens vernichtet werden, so stellen die Ersteren die bewegenden Kräfte dar.

---

[1]) Siehe Figur I.

[2]) Lässt man die sämmtlichen Vorzeichen gelten, so zeigt sich, dass die 6 verschiedenartigen Fälle, die hier eintreten können, sich auf 2 reduciren lassen, wie sie durch die Differentialgleichung (I) unterschieden werden, denn die beiden gegebenen Massenpunkte wirken auf das Pendel entweder in gleichem Sinne oder entgegengesetzt.

Nun ist zur Bestimmung der Winkel, die die Tangente mit r und r_1 bildet

$\cos T_1EK = \cos \theta = \cos (90^0 - DEF) = \sin DEF$

und im Δ OBE

$\cos \theta = \sin DEF = \frac{a \sin (\beta + \varphi)}{r}$ folglich wird die eine wirksame elektrische Kraft repräsentirt durch

$$\pm \frac{m \; m^1}{r^2} \cdot \frac{a \; . \sin (\beta + \varphi)}{r}$$

Analog ist:

$\cos \theta_1 = \cos T_1EG = \cos (DEG - 90^0) = \sin DEG$

und im Δ OEG

$\cos \theta_1 = \sin DEG = \frac{a \sin (\beta - \varphi)}{r_1}$ folglich wird die zweite wirksame elektrische Kraft repräsentirt durch

$$\pm \frac{n \; m^1}{r_1^2} \cdot \frac{a \sin (\beta - \varphi)}{r_1}$$

Indem wir uns nun die Bewegung des gewöhnlichen mathematischen Pendels, bei dem die Schwerkraft allein in Betracht kommt, vergegenwärtigen, wissen wir, dass die Differentialgleichung

$M \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{Mg}{l} \sin \varphi$ dieses Problem löst, denn, haben wir diese integrirt, so stellt sich der Ausschlagswinkel φ als eine Funktion von t dar, mit andern Worten, wir können in jedem Zeitmomente die Stelle der Bahn angeben, an der sich der schwingende Punkt befinden muss. Und diese Zeit stellt sich durch ein elliptisches Integral dar, welches in einer Reihe entwickelt werden kann, nämlich:

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + (\tfrac{1}{2})^2 K^2 + \left(\frac{1.\ 2}{3.\ 4}\right)^2 K^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 K^6 \ldots\right)$$

wo K für $\sin\frac{\alpha}{2}$ gesetzt ist und α die Amplitude bedeutet.

Wir verfahren nun in unserem Falle in ähnlicher Weise d. h. wir fügen zu dieser Differentialgleichung des gewöhnlichen Pendels noch die oben bestimmten elektrischen Anziehungs- resp. Abstossungskräfte hinzu, alsdann erhalten wir die allgemeine Differentialgleichung der Bewegung des elektrischen Pendels in folgender Form:

(I) $$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg}{l}\sin\varphi + \frac{m\,m^1}{r^2}\frac{a\sin(\beta+\varphi)}{r} \pm \frac{nm^1}{r_1^2}\frac{a\sin(\beta+\varphi)^1)}{r_1}$$

Da nun

$r^2 = a^2 + l^2 - 2\,al\,\cos\,(\beta+\varphi)$

$r_1^2 = a^2 + l^2 - 2\,al\,\cos\,(\beta-\varphi)$ ist, so erhalten wir nach Substitution dieser Werthe in (I)

$$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg}{l}\sin\varphi$$

$$+\frac{m\,m^1\ a\sin(\beta+\varphi)}{[a^2+l^2-2al\cos(\beta+\varphi)]^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{n\,m^1\ a\sin(\beta-\varphi)}{[a^2+l^2\ 2al\cos(\beta-\varphi)]^{\frac{3}{2}}}$$

Was diese Vorzeichen anbetrifft, so bezeichnen sie nur die verschiedenen Richtungen der wirkenden Kräfte, die dem elektrischen Fundamentalgesetze unterworfen sind, denn auf diese Richtungen kommt es hier allein an.

Eine einmalige Integration der Gl. (I) können wir nunmehr ausführen, indem wir dieselbe mit $2l\,\frac{d\varphi}{dt}$ auf beiden Seiten multipliciren, und erhalten

[1]) Die Gleichung behält ihre Gültigkeit in allen 4 Quadranten, die wir von der Vertikalaxe im gewöhnlichen Sinne von 0° bis 360° zählen.

(II) $$Ml\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C + 2gM\cos\varphi$$

$$-\sqrt{\frac{2m\,m^1}{a^2+l^2-2al\cos(\beta+\varphi)}} \pm \sqrt{\frac{2n\,m^1}{a^2+l^2-2al\cos(\beta-\varphi)}}$$

Eine zweite Integration gelingt nicht. Wir lassen nun, indem wir die besonders den Physiker interessirenden Fälle im Auge behalten, zuerst den einen elektrischen Massenpunkt $\pm m$ gänzlich verschwinden und erhalten

$\pm m = o$ gesetzt aus (I)

(III) $$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg}{l}\sin\varphi$$

$$\pm\frac{n\,m^1\,a\,\sin(\beta-\varphi)}{[a^2+l^2-2al\cos(\beta-\varphi)]^{\frac{3}{2}}}$$

alsdann bestimmen wir die unter dem Einfluss der beiden jetzt wirksamen Kräfte herrschende Gleichgewichtslage.

Setzen wir demnach $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = o$

so führt uns die Rechnung immer noch auf höhere Gleichungen. Da wir diese möglichst vermeiden wollen, so bestimmen wir den Winkelraum, innerhalb dessen sich die Gleichgewichtslage befinden muss. Setzen wir bei Berücksichtigung des obern Zeichens in (III) $\varphi = o$ so wird die rechte Seite positiv, $\varphi = \beta$ so wird dieselbe negativ, also liegt eine Gleichgewichtslage zwischen o und β.

Bei Berücksichtigung des untern Zeichens wird, wenn man $\varphi = \beta$ setzt, die rechte Seite negativ, $\varphi = 180^0$ gesetzt, dieselbe positiv, also liegt die Gleichgewichtslage in diesem Falle zwischen β und 180^0.

Wir thun nunmehr gut, den elektrischen Massenpunkt $\pm n$ vertikal unter den Aufhängungspunkt des Pendels

zu verlegen.[1]) Alsdann verschwindet nämlich der $\angle\ \beta$ und indem wir bedenken, dass die Attraktionskraft des elektrischen Punktes $\pm n$ den $\angle\ \varphi$ zu verkleinern strebt und $\cos\ (-\varphi) = +\ \cos\ \varphi$

$\sin\ (-\varphi) = -\ \sin\ \varphi$ ist,

erhalten wir schliesslich die einfachere Form

(IV) $$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg}{l}\ \sin\ \varphi\ \pm \frac{n\ m^1\ a\ \sin\ \varphi}{[a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi]^{\frac{3}{2}}}$$ [2])

Wir bestimmen nun zunächst die Gleichgewichtslagen des elektrischen Pendels genauer; diese ergeben sich aus $M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = o$

Im Fall der Anziehung existiren zwei Gleichgewichtslagen, nämlich aus $\sin\ \varphi = o$

$$\varphi = o^0 \text{ oder } \varphi = 180^0$$

erstere ist die stabile Gleichgewichtslage, letztere die labile. Scheinbar folgt noch eine dritte Gleichgewichtslage aus $Mg = \mp \frac{n\ m^1\ al}{(a^2 + l^2 - 2\,al\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

Die Berücksichtigung des oberen Zeichens führt aber hier auf eine Unmöglichkeit, da eine negative Grösse niemals einer positiven gleichwerthig sein kann.

Im Fall der Abstossung haben wir

(V) $$Mg = +\frac{n\ m^1\ al}{(a^2 + l^2 - 2\,al\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$ und es zeigt sich, dass unendlich viele Gleichgewichtslagen existiren können je nach der Grösse der elektrischen Kraft.

[1]) siehe Fig. II.

[2]) Die 4 möglichen Fälle der elektrischen Anziehung resp. Abstossung reduciren sich hier wieder auf 2, die durch die verschiedenen Vorzeichen in (IV) gekennzeichnet werden.

Quadrirt man und setzt $a^2 + l^2 = \varrho^2$, und nimmt alsdann die dritte Wurzel auf beiden Seiten, so ergiebt sich

$$\varrho^2 - 2\,al\,\cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{n^2\,m^{1\,2}\,a^2\,l^2}{M^2\,g^2}}$$

(VI) oder $\varphi = \text{arc. cos.}\left(\frac{1}{2al}\left\{\varrho^2 - \sqrt[3]{\frac{n^2\,m^{1\,2}\,a^2\,l^2}{M^2\,g^2}}\right\}\right)$

Setzt man z. B. $a = l \quad n = m^1$

so wird $\cos\varphi_1 = 1 - \frac{1}{2\,l^2}\sqrt[3]{\frac{m_1{}^1\;{}^4l^4}{M^2\,g^2}}$

analog $\cos\varphi_2 = 1 - \frac{1}{2\,l^2}\sqrt[3]{\frac{m_2{}^1\;{}^4l^4}{M^2\,g^2}}$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$\cos\varphi_4 = 1 - \frac{1}{2l^2}\sqrt[3]{\frac{m^1{}_n\;{}^4l^4}{M^2\,g^2}}$ Wendet man die bekannte trig. Formel für $1 - \cos\varphi$ an, so folgt:

$2\,\sin^2\varphi^1 = \frac{1}{2l^2}\sqrt[3]{\frac{m_1{}^1\;{}^4l^4}{M^2\,g^2}}$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

und $\sin\frac{\varphi_n}{2} = \frac{1}{2\sqrt{l}}\sqrt[6]{\frac{m^1{}_n\;{}^4l}{M^2\,g^2}}$

Diese Gleichung stellt die Relation zwischen $m^1{}_n$ und $\sin\frac{\varphi_n}{2}$, der elektrischen Kraft und dem sinus des Ausschlagswinkels dar. Ist umgekehrt der Ausschlagswinkel gegeben, so findet sich die elektrische Kraft, die in diesem Falle der Schwerkraft das Gleichgewicht hält.

Setzt man die constante Grösse $2\sqrt[4]{4\,M^2\,g^2\,l^2} = c_0$, so wird nämlich

$$m_1{}^1 = c_0 \left(\sin \frac{\varphi_1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$m_2{}^1 = c_0 \left(\sin \frac{\varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$m^1{}_n = c_0 \left(\sin \frac{\varphi_n}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Entsprechende Gleichgewichtslagen befinden sich also im ersten und vierten, im zweiten und dritten Quadranten, wie man leicht aus der Figur ersieht.

Sollte die Anfangslage des Pendels $\varphi = o^0$ sein, so tritt natürlich weder im Falle der Anziehung noch im Falle der Abstossung ein Ausschlag desselben ein; das Kügelchen verharrt in der stabilen Ruhelage, wenn mit dem Faden keine Veränderung vorgehen kann, was wir schon bei unserer Annahme berücksichtigt haben.

Behandeln wir nun Gl. (IV) weiter, so erhalten wir, indem wir sie mit $2l \frac{d\varphi}{dt}$ auf beiden Seiten multipliciren, sodann integriren:

$$\text{(VII)} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} \cos\varphi \mp \frac{2n\ m^1}{Ml(a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}} + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante möge zur Zeit

$$t = o \quad \varphi = \varphi_0 \quad \frac{d\varphi}{dt} = o \text{ sein,}$$

alsdann wird die Constante $C_1 = -\frac{2g\cos\varphi_0}{l}$

$$\pm \frac{2n\ m^1}{Ml\sqrt{(a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi_0)}}$$

oder

(VIII) $$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\cos\varphi + C_1 \mp \frac{2n\ m^1}{Ml\sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi}}}}$$

Würde der Winkel φ so klein werden, dass man $\cos\varphi$ genau $= 1$ setzen könnte, so würde

(IX) $$d\varphi = \gamma \,.\, dt$$

und $\varphi = \gamma t + \delta$, wo γ und δ Constanten bedeuten. Es würde also die Bewegung des Pendels gleichförmig oder der Zeit proportional werden. Dieser Fall könnte eintreten, wenn die elektrische Kraft sehr gering wäre; dann würde also das elektrische Pendel die Bewegung des gewöhnlichen mathematischen Pendels vollführen.

Trifft dies aber nicht zu, so suchen wir obige Wurzel rational zu machen und setzen

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + l^2}{2al}\cos\psi$$

Dann ist $\sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2 + l^2}\sin\frac{\psi}{2}$

oder $\varphi = \text{arc. cos}\left(\frac{a^2+l^2}{2al}\cos\psi\right)$

folglich

$$d\varphi = \frac{-\frac{a^2\ l^2}{2al}\sin\psi d\psi}{\sqrt{1 - \frac{(a^2+l^2)^2}{4a^2\ l^2}\cos^2\psi}} = -\frac{(a^2+l^2)\sin\psi d\psi}{\sqrt{4a^2l^2 - (a^2+l^2)\cos^2\psi}}$$

Führen wir diese Substitutionen (in VIII) aus, so wird $dt =$

$$-\frac{(a^2+l^2)\sin\psi d\psi}{\sqrt{4a^2l^2 - (a^2+l^2)\cos^2\psi}\sqrt{\frac{g(a^2+l^2)}{al^2}\cos\psi \mp \frac{\sqrt{2}\,.\,nm^1}{Ml(\sqrt{2a^2+l^2})\sin\frac{\psi}{2}}} + C_1}$$

Setzt man jetzt $v = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}}$, so wird

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{1}{v} \qquad \cos \psi = 1 - \frac{2}{v^2}$$

$$-\sin \psi d\psi = \frac{4\,dv}{v^3} \text{ und } dt =$$

$$\frac{4\,(a^2+l^2)\,dv}{\sqrt{\left[\left(\frac{(a^2+l^2)g}{al^2}\frac{v^2-2}{v^2} \mp \frac{\sqrt{2}\,nm^1}{Ml\sqrt{(a^2+l^2)}}v + C_1\right)\left(\frac{4a^2l^2v^4-(a^2+l^2)^2(v^2-2)}{v^4}\right)\right]}}$$

oder $dt =$

$$\frac{4\,(a^2+l^2)\,dv}{\sqrt{\left[\left(\frac{(a^2+l^2)g}{al^2}(v^2-2) \mp \frac{\sqrt{2}\,.\,nm^1}{Ml\sqrt{a^2+l^2}}v^3 + C_1v^2\right)\left[4a^2l^2v^4-(a^2+l^2)^2\,(v^2-2)^2\right]\right]}}$$

Führen wir die Multiplikation unter der Wurzel aus und ordnen alle Glieder nach Potenzen von v, so erhalten wir

(X) $$dt = \frac{4\,(a^2+l^2)\,dv}{\sqrt{Av^7 + Bv^6 + Cv^5 + Dv^4 + Ev^3 + Fv^2 + G}}$$

wo $$A = \frac{\mp\sqrt{2}\,.\,nm^1}{M}\left(\frac{4a^2l}{\sqrt{a^2+l^2}} - \frac{\sqrt{(a^2+l^2)^3}}{l}\right)$$

$$B = (a^2+l^2)\left[4ag - \frac{(a^2+l^2)^2g}{al^2}\right] + C_1\left(4a^2l^2 - (a^2+l^2)^2\right)$$

$$C = \frac{\mp 4nm^1\sqrt{2}\,\sqrt{(a^2+l^2)^3}}{Ml}$$

$$D = (a^2+l^2)\left[4\,C_1\,(a^2+l^2) - 8ag + \frac{6\,(a^2+l^2)^3g}{al^2}\right]$$

$$E = \frac{\mp 4\sqrt{2}\,nm^1\sqrt{(a^2+l^2)^3}}{Ml}$$

$$F = -4\,(a^2+l^2)^2\left[\frac{(a^2+l^2)g}{al^2} + C_1\right]$$

$$G = \frac{8\,(a^2+l^2)^3}{al^2}\,g$$

Obige Form stellt ein ultra-elliptisches Integral dar und um t zu finden, müssten wir dieses lösen können.

Um nun zu einfacheren Resultaten zu gelangen, nehmen wir an, dass das elektrische Pendel in sehr kleinen Bögen um seine Gleichgewichtslage schwingt. Wir entwickeln den cos φ in der bekannten Reihe

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\ldots$$

und vernachlässigen — wie es bei sehr kleinen Schwingungen erlaubt ist — die Glieder höherer Potenzen von φ.

Berücksichtigen wir nur den ersten Werth

$$\cos \varphi = 1$$

so erhalten wir, wie schon oben dargelegt, $\varphi = \gamma t + \delta$ mit anderen Worten: ein dem gewöhnlichen mathematischen Pendel vollkommen analog schwingendes elektrisches Pendel.

Setzen wir $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

so erhalten wir nach Subst. in (VIII) und Ausführung der Multiplikation unter der innern Wurzel

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + C_1 \mp \frac{2nm^1}{Ml\sqrt{(a-l)^2 + al}\, q^2}}}$$

Nunmehr setzen wir, um die innere Wurzel rational zu machen

$$\varphi = \frac{a-l}{\sqrt{al}} tg\lambda \qquad \frac{\varphi^2}{2} = \frac{(a-l)^2}{2al} tg^2\lambda$$

$$\text{demnach } d\varphi = \frac{a-l}{\sqrt{al}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \lambda} d\lambda$$

und erhalten für dt

(XI)
$$dt = \frac{\frac{a-l}{\sqrt{al}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\frac{2g}{l}\left(1 - \frac{(a-l)^2}{2al} tg^2 2\lambda\right) + C_1 \mp \frac{2nm^1 \cos \lambda}{Ml\,(a-l)}}}$$

Nun ist ferner $tg^2 2\lambda = \frac{1 - \cos 2\lambda}{\cos 2\lambda}$

Substituiren wir dies und führen wir unter der Wurzel die Multiplikation mit $\cos 2\lambda$ aus, so ergiebt sich

$$dt = \frac{\frac{a-l}{\sqrt{al}} \cdot \frac{1}{\cos 2\lambda}\, d\lambda}{\frac{1}{\cos \lambda}\sqrt{\frac{2g}{l}\left[\cos 2\lambda - \frac{(a-l)^2}{2al}(1 - \cos 2\lambda)\right] + C_1 \cos 2\lambda \mp \frac{2nm^1 \cos 3\lambda}{Ml\,(a-l)}}}$$

oder einfacher

(XII)
$$dt = \frac{D_0\, d\lambda}{\cos \lambda \sqrt{A_0 \cos 3\lambda + B_0 \cos 2\lambda + C_0}}$$

wo $A_0 = \mp \frac{2n\ m^1}{Ml\ (a-l)}$

$$B_0 = \frac{2g}{l}\left(1 + \frac{(a-l)^2}{2al}\right) + C_1$$

$$C_0 = \frac{-(a-l)^2 g}{al^2}$$

$D_0 = \frac{a-l}{\sqrt{al}}$ Oben hatten wir angenommen, dass der $\angle\ \varphi$ sehr klein sein sollte, da φ und λ durch die Relation

$$\varphi = \frac{a-l}{\sqrt{al}}\, tg\lambda$$

mit einander verknüpft sind, daher ist es uns erlaubt, auch die Reihe für $\cos \lambda$ zu entwickeln und mit Vernachlässigung der vierten Potenzen

$$\cos \lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \text{ zu setzen.}$$

Alsdann wird

$$dt = \frac{D_0\, d\lambda}{\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)\sqrt{A_0\,(1-{}^3/_2\,\lambda^2)+B_0\,(1-\lambda^2)+C_0}}$$

oder nach Ausführung der Multiplikationen unter der Wurzel und Ordnung der Glieder

(XIII)
$$dt = \frac{D_0\, d\lambda}{\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)\sqrt{S-R\lambda^2}}$$

wo $S = A_0 + B_0 + C_0 = o$, da cos φ_0 in $C_1 = 1$ wird und $R = {}^3/_2\, A_0 + B_0 = \frac{\pm\, nm^1}{Ml\,(a-l)} + \frac{(a-l)^2 g}{al^2}$

Aus diesem Ausdruck können wir die Zeit t berechnen; es wird nämlich, wenn wir integriren,

$$t = \int \frac{D_0\, d\lambda}{\lambda\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\right)\sqrt{-R}}$$ und zerlegen wir den Ausdruck unter dem Integral in Partialbrüche $t =$

$$\int\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{2}\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)}\right)D_0\, d\lambda$$

$+$ Const. Nehmen wir jetzt die Integrale der einzelnen Glieder, so erhalten wir:

$$t = \tfrac{1}{2} D_0\, l(\lambda^2) - \frac{D_0}{2}\, l\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) - \frac{D_0}{2}\, l\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) + \text{Const.}$$

Nach Absonderung von $\frac{D_0}{2}$ und Zusammenziehung der Logarithmen

(XIV)
$$t = \tfrac{1}{2}\, D_0\, l\left(\frac{\lambda^2}{1-\frac{\lambda^2}{2}}\right) + \text{Const.}$$

Da λ sehr klein ist, so wird dieser Logarithmus sehr

gross, ebenso auch die Schwingungsdauer, da t die Zeit repräsentirt. Wird $\lambda = o$, so wird t unendlich gross, mit andern Worten: es tritt keine Bewegung des elektrischen Pendels ein.

Bis jetzt hatten wir den Fall, dass eine Berührung des Pendels mit dem elektrischen Massenpunkte eintreten könnte, ganz aus unserer Untersuchung ausgeschlossen, indem wir $l < a$ annahmen; diesen Fall wollen wir jetzt näher erörtern. Zu dem Zwecke nehmen wir an, dass sich der elektrische positiv geladene Massenpunkt $+m$ in vertikaler Richtung mehr und mehr aufwärts bewege, bis er endlich in gleicher Höhe mit $+m^1$ sich befindet.[1]) Man sollte nun glauben, die Abstossung der Massenpunkte würde unendlich gross, da ihre Entfernung zu Null wird und das Pendel müsste die ganze Peripherie des Kreises durchlaufen. Dies kann jedoch nicht der Fall sein; denn die angenommenen Massenpunkte sind Kugeln von unendlich kleinen Radien, denen ein bestimmtes Quantum Elektricität mitgetheilt war, das wir uns im Mittelpunkte vereinigt dachten. Es können also in der That die Mittelpunkte der Kugeln, auch wenn diese selbst unendlich klein sind, zu einer wirklichen Berührung nicht zusammentreten, denn die Entfernung ihrer Mittelpunkte bleibt immer gleich der Summe der sehr kleinen Kugelradien. Und hierbei ist es auch nicht nöthig, dass diese ∞ kleinen Kugelradien einander gleich seien, denn immerhin bleibt das Verhältniss unendlich kleiner Kugelradien eine bestimmte reelle Grösse. Ueberhaupt findet ähnlich wie bei gleichen Kreisen z. B. das Verhältniss der Radien wie

[1]) Siehe Fig. III.

$\frac{1}{1}$, bei ungleichen etwa wie $\frac{1}{r}$, (wo r eine reelle Grösse bedeutet,) ist, dasselbe auch bei Kreisen von unendlich kleinen Radien statt, denn das unendlich Kleine kann niemals absolut klein, sondern nur relativ klein sein.

Nehmen wir nun den physikalischen Versuch zu Hülfe, wir meinen das Hollundermarkkügelchen, das vom Conduktor abgestossen wird, so tritt bei starker Ladung desselben der Fall ein, dass das Kügelchen lebhaft abgestossen wird und innerhalb des zweiten Quadranten pendelt; einen ganzen Umlauf der Kreisperipherie vollendet es aber um so weniger, als die abstossenden Kräfte einander entgegen wirken, sobald es in den dritten Quadranten eintritt. Versuchen wir nun diesen Fall, wo der elektrische Massenpunkt in die Kreisperipherie rückt aus unserer allgemeinen Differentialgleichung zu entwickeln und richten wir unser Augenmerk hauptsächlich darauf, zu erforschen, wann das elektrische Pendel im ersten oder zweiten Quadranten schwingen muss und wann es darüber hinausgetrieben wird, denn offenbar muss die Ladung des Conduktors resp. des elektrischen Massenpunktes in einem gewissen Verhältniss zum Ausschlagswinkel des Pendels stehen.

Die Entfernung a geht bei unserer Annahme in l über, der Massenpunkt $\pm n$ und der $\angle \beta$ verschwinden. Drücken wir dies mathematisch aus, so haben wir zu setzen in (I) für den vorliegenden Fall der Abstossung:

$$a = l \qquad n = o \qquad \beta = o$$

und erhalten demnach aus (I)

$$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg}{l}\sin\varphi + \frac{m\,m^1\,l}{(al^2 - 2l^2\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin\varphi$$

Sondert man im Nenner $2l^2$ ab und setzt für $1 - \cos\varphi = 2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$, zieht die Wurzel heraus und führt im Zähler auch den halben Winkel ein nach der bekannten Formel

$$\sin\varphi = 2 \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}$$

so erhält man

(XV) $$M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg}{l} \sin\varphi + \frac{m\, m^1\, l}{4\, l^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}$$

Die Gleichgewichtslage findet man aus $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = o$

Demnach wird

$$-2\frac{Mg}{l} \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{m\, m^1}{4\, l^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\varphi}{2} = o$$

hieraus folgt 1) $\cos\frac{\varphi}{2} = o \quad \frac{\varphi}{2} = 90^0$ oder $\varphi = 180^0$

Es existiren aber ausserdem noch unendlich viele Gleichgewichtslagen des Pendels, die sich ergeben aus

2) $$-\frac{2gM}{l} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{m\, m^1}{4\, l^2 \sin^2\varphi} = o$$

Bestimmt man hieraus φ, so findet man zuerst

$$\sin^3\frac{\varphi}{2} = \frac{m\, m^1}{8\, l\, g\, M}$$

oder

(XVI) $$\varphi = 2 \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m\, m^1}{l\, g\, M}}\right)$$

Setzen wir nun $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{m\, m^1}{l\, g\, M}} = 1$, so wird der Ausschlagswinkel des Pendels genau 180^0 und das Produkt

der elektrischen Spannkräfte, die hier als Abstossungskräfte auftreten $m\ m^1 = 8\ l\ g\ M$.

Wird also diese Abstossungskraft
$m\ m^1 > 8\ l\ g\ M$, so schwingt das Pendel über den zweiten Quadranten hinaus.

Setzt man ferner

$$^1/_2\sqrt[3]{\frac{m\ m^1}{l\ g\ M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ so wird}$$

$m\ m^1 = 2\sqrt{2}\ lgM$, alsdann wird der Ausschlagswinkel $\varphi = 90^0$, das Pendel nimmt die Richtung der Horizontalen an. Es schwingt demnach innerhalb des zweiten Quadranten, sobald

$$m\ m^1 \begin{cases} > 8\ l\ g\ M \\ < 2\sqrt{2}\ l\ g\ M \text{ ist.} \end{cases}$$

Ist $m\,m^1 = lgM$, so wird $\sin\varphi = {}^1/_2$ oder $\varphi = 30^0$. Das Pendel schwingt also innerhalb 30^0 und 90^0, sobald

$$m\ m^1 \begin{cases} < 2\sqrt{2}\ l\ g\ M \\ > l\ g\ M. \end{cases}$$

Ist $m\ m^1 < l\ g\ M$, so wird auch der Ausschlagswinkel des Pendels kleiner als 30^0 u. s. w.

Auf diese Weise kann man fortfahren und bei gegebener Grösse der elektrischen Kräfte den Ausschlagswinkel finden und umgekehrt: aus der Grösse eines gegebenen Ausschlagswinkels einen Rückschluss auf die Grösse der elektrischen Kräfte machen.

Behandeln wir jetzt Gleichung (XV) weiter, indem wir wieder mit $2\frac{d\varphi}{dt}$ multipliciren und integriren, so erhalten wir

(XVII) $$M\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2gM}{l}\cos\varphi - \frac{m\,m^1}{l^2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante sei zur Zeit

$$t = o \qquad \varphi = \varepsilon$$

dann erhalten wir

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varepsilon) - \frac{m\,m^1}{Ml^2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

oder

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varepsilon) - \frac{m\,m^1}{Ml^2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right)}}$$

Fügen wir die constanten Grössen zusammen und setzen

$$\frac{2g}{l}(1 - \cos\varepsilon) + \frac{m\,m^1}{l^2 M\sin\frac{\varepsilon}{2}} = C_2$$

und nehmen nochmals das Integral auf beiden Seiten, so ergiebt sich

(XVIII) $$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_2 - \frac{4g}{l}\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{m\,m^1}{l^2 M\sin\frac{\varphi}{2}}}}$$

Um dieses Integral auf eine allgemeine Form zu reduciren, setzen wir

$$\sin\frac{\varphi}{2} = x^2 \text{ demnach } \varphi = 2\,\text{arc. sin}\,(x^2)$$

$$d\varphi = \frac{4x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \text{ ferner } a_0 = -\frac{m\,m^1}{l^2 M}$$

$$b_0 = -\frac{4g}{l}$$

Nach Substitution dieser Werthe ergiebt sich für

$$t = \int \frac{4x\ dx}{\sqrt{1-x^4}\sqrt{C_2 + \frac{a_0}{x^2} + C_0\ x^4}}$$

Multipliciren wir die Wurzeln im Nenner und ordnen die Glieder nach Potenzen von x, so folgt:

(XIX) $$t = \int \frac{4x^2\ dx}{\sqrt{A_1 + B_1 x^2 + C_1 x^4 + D_1 x^6 + E_1 x^{10}}}$$

wo $A_1 = a_0 \quad B_1 = C_2 \quad C_1 = -a_0 \quad D_1 = C_0 - C_2$ $E_1 = -C_0$ bedeuten.

Wir stossen also wiederum — wie zu erwarten war — auf ein hyperelliptisches (Abel'sches) Integral und können unsere Rechnung nur dadurch weiter führen, dass wir sehr kleine Schwingungen des Pendels um seine Gleichgewichtslage annehmen, bei denen wir (ohne grosse Fehler zu begehen) die sinus der sehr kleinen Ausschlagswinkel gleich den Bögen derselben und die cosinus annähernd gleich 1 setzen können.

Möge demnach die Gleichgewichtslage repräsentirt sein durch einen bestimmten Ausschlagswinkel φ_0, so dass also φ sich darstellt durch

$$\varphi = \varphi_0 + \psi \text{ wo } \psi \text{ ein sehr kleiner } \angle \text{ ist.}$$

Entwickeln wir demnach

$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0 + \psi}{2}$ und bringen die oben genannten Veränderungen an, so wird

$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}$. Dies quadrirt mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grösse 2. Ordnung

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \psi \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}$$

Demnach folgt für t nach Ausführung dieser Subst.

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_2 + C_0\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \psi \sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right) + \frac{a_0}{\sin\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}}}$$

nach Ausführung der Multiplikationen unter der Wurzel

(XX) $t =$

$$\int \frac{d\varphi \sqrt{\sin\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{b_0 \sin^3\frac{\varphi_0}{2} + a_0 + C_2 \sin\frac{\varphi_0}{2} + \psi\left[\frac{3C_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2} + \frac{C_2}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}\right]}}$$

Setzt man nun zur Vereinfachung

$\alpha = \sin\frac{\varphi_0}{2}$ $\qquad$ $\beta = \cos\frac{\varphi_0}{2}$

$\gamma = b_0 \sin^3\frac{\varphi_0}{2} + a_0 + C_2 \sin\frac{\varphi_0}{2}$

$\delta = \frac{3b_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2} + \frac{C_2}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}$, so erhält man das lösbare Integral

$$(\text{XXI})_t = \int \frac{d\psi \sqrt{\alpha + \beta\psi}}{\sqrt{\beta + \delta\varphi}} \text{ oder } t = \int \frac{\delta\psi\ (\alpha + \beta\psi)}{\sqrt{\alpha\gamma + \psi\ (\beta\gamma + \alpha\delta)}}$$

Zerlegen wir dasselbe in zwei Integrale, indem wir im Zähler multipliciren und einzeln integriren, so erhalten wir

$$t = \alpha \int \frac{d\psi}{\sqrt{\alpha\gamma + \psi\ (\beta\gamma + \alpha\delta)}} + \beta \int \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\alpha\gamma + \psi\ (\beta\gamma + \alpha\delta)}}$$

Hiervon ist das erste unmittelbar zu finden, nämlich

$$= \frac{2\alpha}{\beta\gamma + \alpha\delta}\sqrt{\alpha\gamma + \psi\ (\beta\gamma + \alpha\delta)}$$

das zweite nach kurzer Umformung

$$= \frac{2\beta\psi}{3(\beta\gamma+\alpha\delta)}\sqrt{\alpha\gamma+\psi(\beta\gamma+\alpha\delta)} - \frac{4\alpha\beta\gamma}{3(\beta\gamma+\alpha\delta)^2}\sqrt{\alpha\gamma+\psi(\beta\gamma+\alpha\delta)}$$

Summirt man daher beide und sondert die gleiche Wurzel im Zähler und $(\beta\gamma+\alpha\delta)^2$ im Nenner ab, so erhält man

$$t = \int \frac{d\psi\ (\alpha+\beta\psi)}{\sqrt{\alpha\gamma+\psi\ (\beta\gamma+\alpha\delta)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha\gamma+\psi(\beta\gamma+\alpha\delta)}}{(\beta\gamma+\alpha\delta)^2}\left[\alpha(\beta\gamma+\alpha\delta) + \frac{\beta\psi}{3}(\beta\gamma+\alpha\delta) - {}^2/_3\alpha\beta\gamma\right]$$

oder (XXII)

$$t = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma+\psi(\beta\gamma+\alpha\delta)}}{(\beta\gamma+\alpha\delta)^2}\left[\left(\alpha+\frac{\beta\psi}{3}\right)(\beta\gamma+\alpha\delta) - {}^2/_3\alpha\beta\gamma)\right] t = \Psi$$

Die Schwingungen werden sehr langsam, wenn die Zeitdauer t sich der Unendlichkeit nähert, und dies geschieht, sobald $\beta\gamma+\alpha\delta$ sich der Null nähert.

Hieraus ergiebt sich nach Substitution der obigen Werthe

$$\text{(XXIII)} \quad -\frac{Mg}{l}\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2} + {}^5/_2 C_2 \sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2} - \frac{m\,m^1}{l^2 M}\cos\frac{\varphi_0}{2} = o$$

$$\text{d. h. 1)} \quad \cos\frac{\varphi_0}{2} = o \quad \text{oder} \quad \varphi_0 = 180^0$$

und dies lässt sich physikalisch in der Weise erklären, dass, sobald sich der elektrische Massenpunkt der labilen Gleichgewichtslage ($\varphi = 180^0$) nähert, die kleinste elektrische Wirkung — unter sonst gleichen Verhältnissen — auf denselben ausgeübt wird.

Zweitens ergiebt sich aus (XXIII), dass so gut wie keine Bewegung des Pendels eintritt, sobald

$$^5/_2\ C_2 \sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{m m^1}{l^2 M} + \frac{Mg}{l} \sin \frac{^3\varphi_0}{2}$$

d. h. die elektrischen Kräfte

$$m m^1 = - l M^2 g \sin \frac{^3\varphi_0}{2} + {}^5/_2\ C_2 \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

sind.

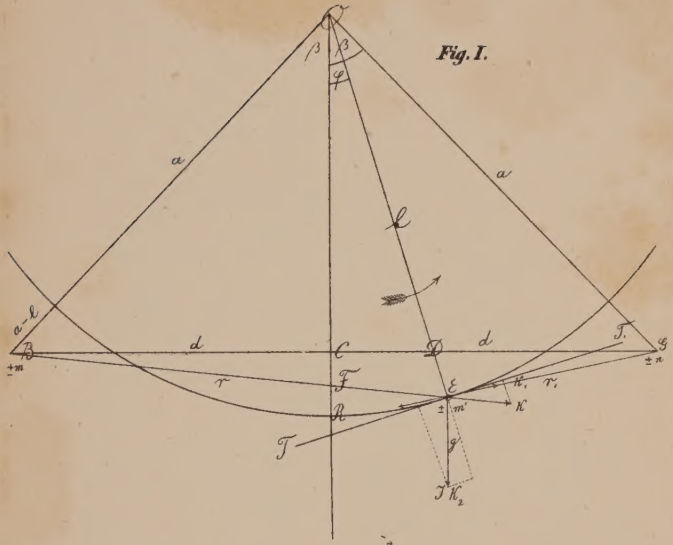

Fig. I.

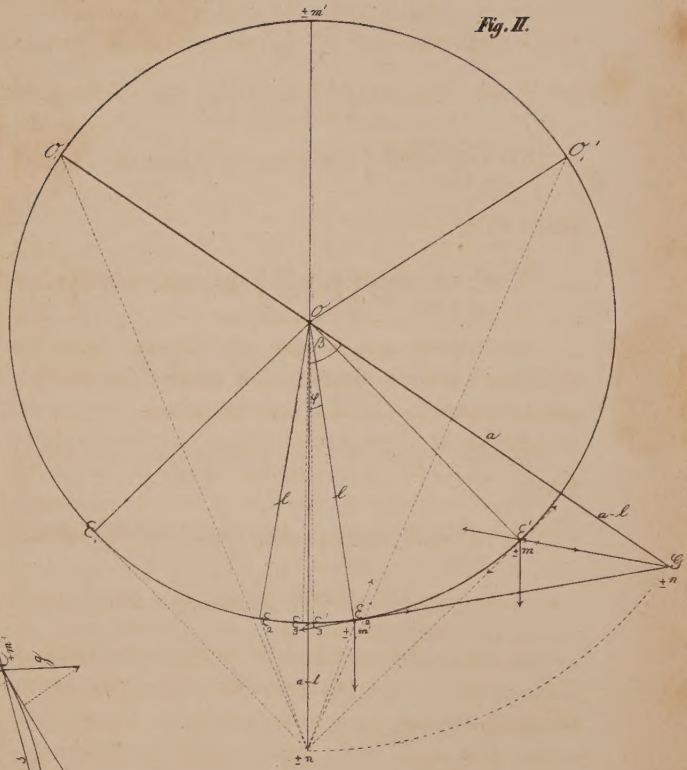

Fig. II.

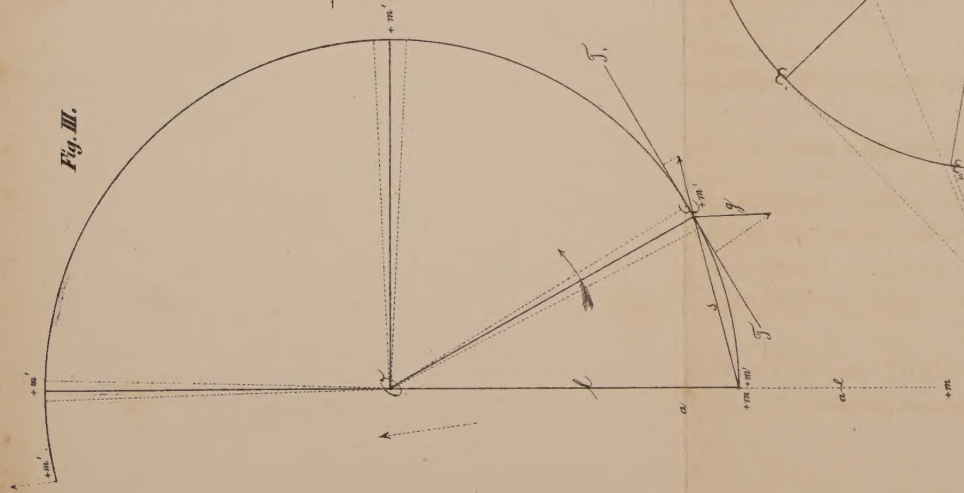

Fig. III.